**4.1. Поняття графа.**

***Частина I***

**а) *Основні теоретичні відомості.***

Нехай  – деяка непорожня скінчена множина, а  – множина всіх двохелементних підмножин (невпорядкованих пар різних елементів) множини .

***Графом*** (***неорієнтованим графом***)  називається пара множин , де  довільна підмножина множини  (). Позначається . При цьому елементи множини  називаються ***вершинами*** графа , а елементи множини  ***ребрами*** графа . Відповідно  називається ***множиною вершин*** і  ***множиною ребер*** графа . Ребра  записуються за допомогою круглих дужок  (іноді просто ). Число вершин графа позначається , число ребер – .

Неупорідкована пара вершин називається ***ребром***, упорідкована пара–***дугою***.

Граф, який містить тільки ребра, називається ***неорієнтованим***; граф, який містить тільки дуги – ***орієнтованим*** (або ***орграфом***).

Пара вершин може бути з’єднана двома, або більше ребрами (або, відповідно, дугами одного напрямку), такі ребра називають ***кратними***.

Дуга (або ребро) може починатися й закінчуватися в одній і тій самій вершині, в цьому випадку відповідна дуга (або ребро) називається ***петлею***.

Нехай задано граф . Якщо , то кажуть, що ***вершини***  i  є ***суміжними****,* у противному разі вершини **вершини**  i  є **несуміжними**. Якщо  ребро графа, то вершини  i  називаються ***кінцями*** ребра . У цьому випадку кажуть також, що ребро  ***з’єднує*** вершини  i . Вершина  і ребро  називаються ***інцидентними***, якщо  є кінцем .

Два ***ребра*** називаються ***суміжними***, якщо вони мають спільну вершину.

Кожен граф можна представити в евклидовому просторі множиною точок, які відповідають вершинам, які з’єднані лініями, які відповідають ребрам (або дугам – в останньому випадку напрямок вказується стррілками) – таке представлення називається ***укладкою*** графа.

Відомо, что в *3-вимірному просторі* будь-який граф можна представити у вигляді укладки таким чином, що лінії, які відповідають ребрам (дугам) *не будуть перетинатися*. Для *2-вимірного простору це* невірно. Допускають представлення у вигляді укладки в 2-вимірному просторі графи, які називають ***плоскими***.

*Способи завдання графів.*

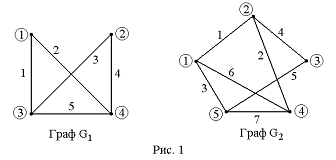
1. Завдання множин *V* і *E* за допомогою ***переліку їх елементів***.

*Приклад.* Граф , де , це граф із чотирма вершинами і п’ятьма ребрами.А граф , де , 

це граф із п’ятьма вершинами і сімома ребрами.

2. Графічний. Граф  зручно зображати за допомогою рисунка на площині, який називають ***діаграмою*** графа *G*. Вершинам графа *G* ставляться у бієктивну відповідність точки площини; точки, що відповідають вершинам *v* i *w*, з’єднуються лінією (відрізком або кривою) тоді і тільки тоді, коли *v* i *w* суміжні вершини. Зрозуміло, що діаграма графа змінюватиме свій вигляд у залежності від вибору відповідних точок на площині.

*Приклад.* На рисунку 1 зображені діаграми графів  i  з попереднього прикладу.



3. Завдання графа за допомогою матриці суміжності. Занумеруємо всі вершини графа *G* натуральними числами від 1 до *n*. ***Матрицею суміжності*** *A* графа *G* називається квадратна -матриця, в якій елемент  *i*-го рядка і *j*-го стовпчика дорівнює 1, якщо вершини *vi* та *vj* з номерами *i* та *j* суміжні, і дорівнює 0 у противному випадку.

*Приклад.* Для графів *G*1 i *G*2 маємо відповідно

 i .

Очевидно, що матриці суміжності графів симетричні.

4. Задання графа за допомогою матриці інцидентності. Занумеруємо всі вершини графа *G* числами від 1 до *n* і всі його ребра числами від 1 до *m*. ***Матрицею інцидентності*** *B* графа *G* називається -матриця, в якій елемент *bij* *i*-го рядка і *j*-го стовпчика дорівнює 1, якщо вершина *vi* з номером *i* інцидентна ребру *ej* з номером *j*, і дорівнює 0 у противному разі.

*Приклад.* Для графів *G*1 і *G*2 маємо (ребра графів нумеруємо в тому порядку, в якому вони виписані в прикладі 3.1)

 і 

5 Задання графа за допомогою списка суміжності. При цьому кожній вершині графа відповідає свій список. У список, що відповідає вершині *v*, послідовно записуються всі суміжні їй вершини.

*Приклад.* Для графів *G*1 і *G*2 маємо списки

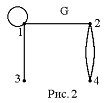
|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *G*1: | *v*1: *v*3,*v*4 | *v*2: *v*3,*v*4 | *v*3: *v*1,*v*2,*v*4 | *v*4: *v*1,*v*2,*v*3 |  |
| *G*2: | *v*1: *v*2,*v*4,*v*5 | *v*2: *v*1,*v*3,*v*4 | *v*3: *v*2,*v*5 | *v*4: *v*1,*v*2,*v*5 | *v*5: *v*1,*v*3,*v*4 |

Вибір та зручність того чи іншого зі способів завдання графів залежать від особливостей задачі, яка розв’язується.

Якщо порядок елементів, які входять в , має значення, то граф називається ***орієнтованим*** (directed graph), скорочено – орграф (digraph), навпаки – ***неорієнтованим*** (undirected graph). Ребра орграфа називаються **дугами** (arcs). В подальшому будемо вважати, що термін “граф”, який застосовують без уточнень “орієнтований” или “неорієнтований”, означає неорієнтований граф.

***Степень вершини*** графа – це число ребер, які інцидентні даній вершині, причому петлі враховуються двічі. Позначається степень вершини  через  або . Оскільки кожне ребро інцидентне двом вершинам, сума степенів всіх вершин графа дорівнює кодвоєній кількості ребер: .

*Приклад.* ; ; 



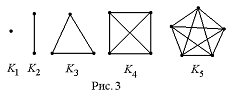
*Властивість 1.* Степені вершин повного графа однакові, і кожна з них на 1 менше числа вершин цього графа.

*Властивість* 2. Сума степенів вершин графа число парне, яке дорівнює подвоєному числу ребер графа.

*Властивість* 3. Число непарних вершин будь-якого графа парне.

Граф, який не містить петель і кратних ребер, називається ***звичайним***, або ***простим графом*** (simple graph). В багатьох публікаціях використовується інша термінологія: під графом розуміють простий граф, граф з кратними ребрами називають ***мультиграфом***, з петлями – ***псевдографом***.

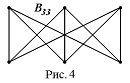
Деякі класи графів отримали особливі наіменування. Граф з будь-якою кількістю вершин, який не містить ребер, називається ***порожнім***. Звичайний граф з  вершинами, будь-яка пара вершин якого з’днана ребром, називається ***повним* і** позначається  (в повном графі  ребер).



***Доповненням*** графа  називається граф  з тими самими вершинами, що й граф , і з тими й тільки тими ребрами, які необхідно добавити до графа , щоб отримати повний граф.

Граф, вершини якого можна розбити на підмножини, що не перетинаються  и  так, що ніякі дві вершини, які належать одній і тій самій підмножині, не суміжні, називається ***двудольним*** (або ***біхроматичним***, або ***графом Кеніга***) і позначається  (m=|V1|, n=|V2|, m+n=|V|). **Повний двудольний** граф – такий двудольний граф, що кожна вершина множини V1 зв’язана з всіма вершинами множини V2, і навпаки; позначається – Kmn.

Повний двудольний граф Bmn не є повним (за виключенням B11=K2).



***Підграфом****,* або ***частиною*** графа  називається такий граф , що  і дві несуміжні вершини в  не суміжні в . ***Повним підграфом***називається підграф, будь-яка пара вершин якого суміжна. ***Остовним підграфом (суграфом)*** графа G називається будь-який його підграф, який містить ту саму множину вершин, що й G.

**б) *Питання для самоперевірки***

1. Нарисуйте діаграму повного графа з *n* вершинами *Kn* для: а) *n* = 2; б) *n*=3; в) *n*=4; г) *n*=5.

2. Чому дорівнює степінь кожної вершини у повному графі з *n* вершинами?

3. Скільки ребер містить повний граф із *n* вершинами?

4. Чи існує повний граф, у якого кількість ребер дорівнює: а) 15; б) 18; в) (*n* дев’яток і *n* нулів); г) ?

5. Які особливості має матриця суміжності двочасткового графа?

6. Скільки вершин може мати граф, усі вершини якого є кінцевими? Скільки ребер у такому графі?

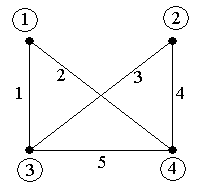
**в) *Методичні вказівки до розв’язування задач***

1. Нехай задано граф :

**, .

Побудувати діаграму, матриці суміжності та інцидентності графа.

*Розв’язок.* Побудуємо діаграму графа



Матриця суміжності A і матриця інцидентності B графа мають вигляд:

 .

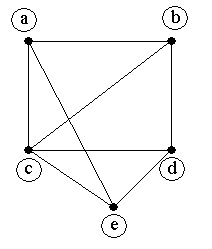
2. Нехай *V*={*a*,*b*,*c*,*d*,*e*}. Граф  задано за допомогою матриці суміжності *A*.

.

Визначити множину ребер *E* графа *G*. Побудувати діаграму та матрицю інцидентності графа *G*.

*Розв’язок*. Тобто, маємо .

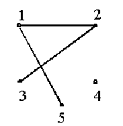
Побудуємо діаграму графа



Матриця інцидентності B графа має вигляд:



3. Граф *G* задано його діаграмою.



Визначити множину вершин *V* і множину ребер *E*, матриці суміжності та інцидентності графа *G*.

*Розв’язок*. Тобто, маємо , .

Матриця суміжності A і матриця інцидентності B графа мають вигляд:

 і 

4. Чому дорівнює кількість ребер у графі , якщо граф *G* має *n* вершин і *k* ребер?

*Розв’язок*. Нехай  має m ребер. За визначенням граф  має тіж самі вершини що й граф *G*,і тільки ті ребра, які необхідно добавити до графа *G,* щоб отримати повний граф. За означенням, в повному графі  ребер. Отже, кількість ребер у графі  дорівнює .

***Частина II***

## Задачі для самостійної роботи

1. Нехай задано граф *G* =(*V*,*E* ):

*V* = {*a*,*b*,*c*,*d*,*e*}, *E* = {(*a*,*d*),(*b*,*c*),(*b*,*e*),(*c*,*e*),(*d*,*b*),(*d*,*e*),(*e*,*a*)}.

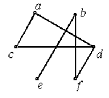
Побудувати діаграму, матриці суміжності та інцидентності графа.

2. Нехай *V*={*a*,*b*,*c*,*d*,*e*}. Граф  задано за допомогою матриці суміжності *A*.

.

Визначити множину ребер *E* графа *G*. Побудувати діаграму та матрицю інцидентності графа *G*.

3. Граф *G* задано його діаграмою.



Визначити множину вершин *V* і множину ребер *E*, матриці суміжності та інцидентності графа *G*.

4. Довести, що доповненням графа  є граф *G*.

5. Чому дорівнює степінь вершини *v* у графі , якщо в графі *G* з *n* вешинами: а) ; б) ; в) ; г) ?

6. Нехай задано матрицю суміжності *A* деякого графа *G*. Як за допомогою матриці *A* визначити:

(а) кількість вершин графа *G*;

(б) кількість ребер графа *G*;

(в) степінь  певної вершини *v* графа *G*;

(г) чи є граф *G* повним графом;

(д) матрицю інцидентності графа?

7. Скільки ребер у графі з *n* вершинами, якщо всі його вершини мають степінь 2?

8. Довести, що в будь-якому графі кількість вершин, степінь яких непарний, є парною.

9. У певному товаристві з *n* осіб кожен є знайомим з *k* і тільки *k* іншими особами. Чи можливе таке товариство для: а) *n*=5, *k*=2; б) *n*=5, *k*=3; в) *n*=2*m*, *k*=1; г) *n*=2*m*, *k*=3?

10. Чи існує граф із *n* вершинами, усі вершини якого є кінцевими, якщо а) *n*=10; (б) *n*=11; (в) *n*=2*k*  1; (г) *n*=2*k*?

11. Скільки ребер містить повний двочастковий граф ?

12. Побудувати кубічний граф із: а) чотирма вершинами; б) шістьма вершинами; в) вісьмома вершинами.

13. Побудувати граф, який зображує відношення подільності на множині {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}.

14. Довести, що в будь-якому графі  .

15. 29 команд беруть участь у футбольному турнірі. Довести, що в будь-який момент знайдеться команда, яка зіграла парну кількість матчів.

## Частини III

***Задачі підвищеної складності***

1. Нехай *B*  матриця інцидентності графа *G* з *n* вершинами. Довести, що *i*-й діагональний елемент матриці *BBT* дорівнює степеню  *i*-ї вершини графа *G*, *i*=1,2,...,*n*.

2. Нехай *A* матриця суміжності, а *B* матриця інцидентності графа *G*. Довести, що матриця *A* дорівнює матриці *BB* *T*, в якій усі діагональні елементи замінено нулями.

3. Нехай у графі *G* з *n* вершинами і *m* ребрами є *p* вершин степеня *t*, а всі інші вершини мають степінь . Довести, що .

4. Позначимо через  множину всіх вершин, суміжних із вершиною , а через  множину . Нехай  це множина всіх графів  з  вершинами таких, що

1) для будь-яких несуміжних вершин  виконується або , або ;

2) для будь-яких суміжних вершин  виконується  , або ;.

Довести, що в довільному графі 

а) вершини з однаковими степенями або всі попарно суміжні, або всі попарно несуміжні;

б) існує принаймні одна вершина степеня ;

в) якщо для деякого *k* вершини степеня *k* попарно суміжні, то й вершини степеня, більшого ніж *k*, також попарно суміжні;

г) вилучення будь-якої вершини приводить до графа з множини .

***Частина IV***

***Домашнє завдання***

1. Нехай задано граф *G* =(*V*,*E* ):

(а) *V* = {1,2,3}, *E* = {(1,2),(1,3),(2,3)};

(б) *V* = {*A*,*B*,*C*,*D*}, *E* = {(*A*,*B*),(*A*,*D*),(*B*,*C*),(*B*,*D*),(*C*,*A*),(*C*,*D*)}.

Побудувати діаграму, матриці суміжності та інцидентності для кожного із заданих графів.

2. Нехай *V*={*a*,*b*,*c*,*d*,*e*}. Граф  задано за допомогою матриці суміжності *A*.

(а) ; (б).

Визначити множину ребер *E* графа *G*. Побудувати діаграму та матрицю інцидентності графа *G*.

3. Граф *G* задано його діаграмою.



Визначити множину вершин *V* і множину ребер *E*, матриці суміжності та інцидентності графа *G*.

4. Декілька осіб проводять шаховий турнір в одне коло. У деякий момент виявилось, що тільки двоє шахістів зіграли однакову кількість партій. Довести, що тоді є або тільки один учасник, який не зіграв жодної партії, або тільки один, який зіграв усі партії турніру.

5. Побудуйте граф із п’ятьма вершинами, в якому тільки дві вершини мають однакові степені.

6. Чи існує граф із шістьма вершинами, степені яких дорівнюють: а) 2,3,3,4,4,4; б) 2,2,2,4,5,5? Відповідь обгрунтувати.

7. Скільки вершин із однаковими степенями має граф , якщо граф *G* має тільки 2 вершини з однаковими степенями?

8. У графі з п’ятьма вершинами тільки дві вершини мають однакові степені. Чи можуть обидві ці вершини мати степінь 0 або степінь 4?

9. Довести, що в будь-якому графі з *n* вершинами () завжди знайдуться принаймні дві вершини з однаковими степенями.

10. Довести, що в довільному графі G із шістьма вершинами завжди знайдуться три вершини, які є або попарно суміжними, або попарно несуміжними. (Це математичне формулювання відомої задачі: довести, що серед будь-яких шести осіб знайдеться або три особи, що попарно знайомі між собою, або три особи, попарно незнайомі).